3 SEM FYUGP MTHC3A

2024

(December)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC3A

(Theory of Real Functions)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* যদি $A \subseteq \mathbb{R}$ আৰু c, A ৰ এটা ক্লাষ্টাৰ বিন্দু হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\lim_{x \to c} f(x) \text{ ৰ}$$

কেৱল এটা মাত্ৰ সীমা থাকিব, য'ত $f : A \to \mathbb{R}$. 2

If $A \subseteq \mathbb{R}$ and c is a cluster point of A, then show that

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

can have only one limit, where $f : A \to \mathbb{R}$.

অথবা / Or

যদি (If)

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

য'ত $f: A \to \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$, তেন্তে দেখুওৱা যে প্ৰতিটো অভিসাৰী অনুক্ৰম (x_n)ৰ বাবে যাৰ সীমা c, আন এটা অভিসাৰী অনুক্ৰম $(f(x_n))$ থাকিব যাৰ সীমা হ'ব L. $(x_n \neq c)$

where $f: A \to \mathbb{R}$ with $A \subseteq \mathbb{R}$, then show that for every convergent sequence (x_n) converging to c, the sequence $(f(x_n))$ will converge to L. $(x_n \neq c)$

(b) ε-δ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

Use ε-δ definition to show that

$$\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$ 2

অথবা / Or

যদি (If)

$$\lim_{x \to c} f(x) = L;\ L \in \mathbb{R}$$

য'ত c, $A (A \subseteq \mathbb{R})$ৰ এটা ক্লাষ্টাৰ বিন্দু আৰু $f: A \to \mathbb{R}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

where c is a cluster point of $A (A \subseteq \mathbb{R})$ and $f: A \to \mathbb{R}$, then show that

$$\lim_{x \to c} |f(x) - L| = 0$$

(c) যদি $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \to \mathbb{R}$; c, Aৰ এটা ক্লাষ্টাৰ বিন্দু আৰু $\lim_{x \to c} f$ ৰ মান থাকে, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $A \subseteq \mathbb{R}$; $f: A \to \mathbb{R}$; c is a cluster point of A and $\lim_{x \to c} f$ exists, then show that

$$\lim_{x \to c} |f| = \left| \lim_{x \to c} f \right|$$

য'ত (where)

$$|f|(x) := |f(x)| \quad \forall x \in A$$ 4

2. (a) ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ অনুক্ৰমৰ সূত্ৰটো লিখা। 1

State the sequential criterion for continuity of a function.

(b) যদি f সুষমভাৱে $A (A \subseteq \mathbb{R})$ত অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু $|f(x)| \geq k > 0\ \forall x \in A$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\frac{1}{f}$ সুষমভাৱে A ত অবিচ্ছিন্ন হ'ব। 2

If f is uniformly continuous on $A \subseteq \mathbb{R}$ and $|f(x)| \geq k > 0\ \forall x \in A$, then show that $\frac{1}{f}$ is uniformly continuous on A.

(c) অনুক্রমৰ চৰ্ত ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ফলনটো $x = 0$ত অবিচ্ছিন্ন নয় বুলি দেখুওৱা : 3

Use sequential criterion to show that the following function is not continuous at $x = 0$:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

(d) যদি $f : A \to \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$ কোনো এটা বিন্দু $c \in A$ত অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু $g(x) = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$, তেন্তে দেখুওৱা যে $|f|$, য'ত $|f|(x) := |f(x)|$, $c \in A$ত অবিচ্ছিন্ন হ'ব। 3

If $f : A \to \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$ be continuous at $c \in A$ and $g(x) = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$, then show that $|f|$ defined by $|f|(x) := |f(x)|$ is continuous at $c \in A$.

অথবা / Or

যদি (If) $f(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ আৰু (and)

$$g(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে দুয়োটা ফলন $g \circ f$ আৰু $f \circ g$ অবিচ্ছিন্ন $\forall x \in \mathbb{R}$.

then show that both $g \circ f$ and $f \circ g$ are continuous $\forall x \in \mathbb{R}$.

(e) সুষম অবিচ্ছিন্নতাৰ সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 1+2=3

State and prove the uniform continuity theorem.

অথবা / Or

যদি $f : I \to \mathbb{R}$, Iত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f(I) = [m, M]$, য'ত

If $f : I \to \mathbb{R}$ is continuous on I, then show that $f(I) = [m, M]$, where

$I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$; $\inf f = m$; $\sup f = M$ 3

3. (a) কাৰাথীঅ'ডৰিৰ সূত্ৰটো লিখা আৰু এই সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি $f(x) = x^2$ৰ অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা। 2

State Caratheodory's theorem and find the derivative of $f(x) = x^2$ using this theorem.

(b) যদি $f : I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$; $c \in I$ ফলনটোৰ cত অৱকলজ থাকে আৰু এই মান ঋণাত্মক হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে, $f(x) > f(c)\ \forall x \in (c - \delta, c) \subseteq I$ য'ত $\delta > 0$. 3

If $f : I \to \mathbb{R}$ with $I \subseteq \mathbb{R}$ and $c \in I$ and $f'(c)$ exists and is negative, then show that $\exists \delta > 0$ s.t. $f(x) > f(c)\ \forall x \in (c - \delta, c) \subseteq I$.

(c) যদি $f:[0, 2] \to \mathbb{R}$, $[0, 2]$ত অবিচ্ছিন্ন, $(0, 2)$ত অৱকলজীয় আৰু $f(0)=0$; $f(1)=1$; $f(2)=1$, তেন্তে দেখুওৱা যে, $f'(c_1)=1$; $c_1 \in (0, 1)$ আৰু $f'(c_2)=0$; $c_2 \in (1, 2)$.

1½+1½=3

If $f:[0, 2] \to \mathbb{R}$ is continuous on $[0, 2]$ and differentiable on $(0, 2)$ and given that $f(0)=0$; $f(1)=1$; $f(2)=1$, then show that $\exists\, c_1 \in (0, 1)$ and $c_2 \in (1, 2)$ such that $f'(c_1)=1$ and $f'(c_2)=0$.

(d) মধ্যমান সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। সূত্ৰটোৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া। 1+2+1=4

State and prove mean value theorem. Interpret the result geometrically.

(e) মধ্যমান সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

Apply mean value theorem to show that

$$(1+x)^{\alpha} > 1+\alpha x \quad \forall x > -1;\ \alpha > 1$$ 4

(f) তলৰ ফলনটোৰ সৰ্বোচ্চ/সৰ্বনিম্ন অথবা যথাযোগ্য জটিল বিন্দু নিৰূপণ কৰা : 4

Find the extrema or other critical point(s) as applicable for the following function :

$$f(x)=(x-1)^3(x+1)^3$$

4. *(a)* টেইলৰ আৰু মেক্ল'ৰিণৰ শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define Taylor's and McClaurin's series.

(b) যদি $f: I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ উত্তল ফলন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $e^{f(x)}$ ফলনটো উত্তল হ'ব। 2

If $f: I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ is a convex function, then show that $e^{f(x)}$ is a convex function.

(c) তলত দিয়া যি কোনো এটাৰ বিস্তৃতি দিয়া : 3

Expand any *one* of the following :

(i) e^x

(ii) $\cos x$

(d) ক'চিৰ মধ্যমান সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। সূত্ৰটোৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া। 1+2+1=4

State and prove Cauchy's mean value theorem. Interpret the geometrical aspect of the theorem.

(e) যদি $f : I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ এটা মুক্ত অন্তৰাল, অৱকলজীয় হয় আৰু $f''(a)$ ৰ মান সংজ্ঞাবদ্ধ হয় $a \in I$ত, তেন্তে 2য় অৰ্ডাৰৰ মধ্যমান সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে

If $f : I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ an open interval, is differentiable and $f''(a)$ exists at $a \in I$, then using mean value theorem of second order show that

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)\}$$ 4

(f) লাগ্ৰাঞ্জৰ বাকীপদৰ সৈতে টেইলৰৰ সূত্ৰ লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 1+4=5

State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder.

★★★