Total No. of Printed Pages—8

1 SEM FYUGP MINMTH1

2024

(December)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH1

(Differential Calculus)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. (a) কেতিয়া এটা ফলন f বন্ধ অন্তৰ $[a, b]$ত অনবিচ্ছিন্ন হোৱা বুলি কোৱা হয়? 1

When is a function f said to be continuous in a closed interval $[a, b]$?

(b) বিচ্ছিন্নতাৰ প্ৰকাৰ লিখা, যদি $\lim_{x \to a} f(x)$ৰ অৱস্থিতি থাকে আৰু $f(a)$ ৰ সমান নহয়। 1

Write the type of discontinuity, if $\lim_{x \to a} f(x)$ exists but not equal to $f(a)$.

(c) (ε, δ) ৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি, দেখুওৱা যে $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$ য'ত $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, $x \neq a$. 3

Using (ε, δ) definition, show that $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$, where $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, $x \neq a$.

(d) মান নিৰ্ণয় কৰা : 2

Evaluate :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

(e) $f(x) = |x-1|$ ফলনটোৰ $x = 1$ বিন্দুত অৱকলজীয়তাৰ পৰীক্ষা কৰা। 4

Examine the differentiability of the function $f(x) = |x-1|$ at $x = 1$.

অথবা / Or

যদি $y = \sin^3 x$, তেন্তে y_n নিৰ্ণয় কৰা।

If $y = \sin^3 x$, then find y_n.

2\. (a) যদি $y = \cos 3x$, তেন্তে y_n ৰ মান লিখা। 1

If $y = \cos 3x$, then write the value of y_n.

(b) যদি $u = \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, তেন্তে $\frac{\partial u}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial u}{\partial y}$ নিৰ্ণয় কৰা। 2

If $u = \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, then find $\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial u}{\partial y}$.

(c) যদি $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, then show that

$$(1-x^2) y_{n+2} - (2n+3) x y_{n+1} - (n+1)^2 y_n = 0$$ 4

অথবা / Or

যদি $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$, then prove that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

(d) দুটা চলকৰ সমমাত্ৰাৰ ফলনৰ বাবে অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

অথবা / Or

যদি $u = e^{xyz}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

If $u = e^{xyz}$, then prove that

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2) e^{xyz}$$

3. (a) $y = f(x)$ বক্রৰ (x_1, y_1) বিন্দুত অভিলম্বৰ সমীকৰণ লিখা। 1

Write the equation of normal to the curve $y = f(x)$ at the point (x_1, y_1).

(b) $y = x^2 + 1$ বক্রৰ (3, 4) বিন্দুত স্পর্শকৰ নতি উলিওৱা। 1

Find the slope of the tangent to the curve $y = x^2 + 1$ at the point (3, 4).

(c) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্রটোৰ x-অক্ষত ছেদ কৰা বিন্দুত স্পর্শকৰ সমীকৰণ উলিওৱা। 3

Find the equation of the tangent to the curve $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ at the point where it meets x-axis.

অথবা / *Or*

যি কোনো বিন্দুত বক্রতা শূন্য হোৱা বক্র উলিওৱা।

Find the curve whose curvature at any point on it is zero.

(d) তলত দিয়া বক্রৰ অনন্তস্পর্শী নির্ণয় কৰা : 4

Find the asymptotes of the following curve :

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 - xy + 2 = 0$$

অথবা / *Or*

$y = x^3 - 3x + 3$ সমীকৰণৰ গ্ৰাফ অংকন কৰা, আৰু স্থানীয় চৰম বিন্দু আৰু ইনফ্লেকচন বিন্দু চিনাক্ত কৰা।

Draw the graph of the equation $y = x^3 - 3x + 3$, and identify local extreme points and inflection points.

(Continued)

In the mean value theorem

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\ a<c<b$$

find the value of c, if

$$f(x)=x^2+2x-1,\ a=0,\ b=1$$

(d) e^x ক x ৰ ঘাত হিচাপে মেক্লৰিনৰ শ্ৰেণীত বিস্তাৰ কৰা। 3

Expand e^x in power of x by Maclaurin's series.

6. (a) টেইলৰৰ শ্ৰেণীৰ nতম পদৰ অৱশিষ্ট পদটো লাগ্ৰাঞ্জৰ আকাৰত লিখা। 1

Write the remainder after n terms of Taylor's series in Lagrange's form.

(b) $f(x)$ ফলনৰ $x=a$ বিন্দুত স্থানীয় চৰম মান থকাৰ পৰ্যাপ্ত চৰ্তটো লিখা। 1

Write the necessary condition for a function $f(x)$ to have local extreme value at $x=a$.

(c) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$ ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the maximum and minimum values of the function

$$f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$$

অথবা / *Or*

মেক্লৰিনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $\sin x$ ক x ৰ সূচকত অসীম শ্ৰেণীত বিস্তৃত কৰা।

Using Maclaurin's theorem, expand $\sin x$ in an infinite series in powers of x.

(d) তলৰ যি কোনো দুটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰা : 2×2=4

Find the value of any *two* of the following :

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

(ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{2\tan x}$

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

7. (a) যদি ফলন

$$f(x)=\begin{cases}7x-3, & x\le 1\\ kx^2, & x>1\end{cases}$$

যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x ৰ বাবে অবিৰত হয়, তেন্তে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। 2

If the function

$$f(x)=\begin{cases}7x-3, & x\le 1\\ kx^2, & x>1\end{cases}$$

is continuous for all $x\in\mathbb{R}$, then find the value of k.

(b) x ৰ সাপেক্ষে $y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$ ৰ অৱকলজ উলিওৱা। 4

Find the derivative of $y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$ w.r.t. x.

(c) যদি $y=e^{ax}\cos bx$, তেন্তে y_n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। 4

If $y=e^{ax}\cos bx$, then find y_n.

(d) তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা : 5×2=10

Answer any *two* of the following :

(i) $r = a(1-\cos\theta)$ কাৰডিয়ইডৰ যি কোনো বিন্দু (r, θ)ত বক্রতাৰ ব্যাসার্ধ নির্ণয় কৰা।

Find the radius of curvature at any point (r, θ) of the cardioid $r = a(1-\cos\theta)$.

(ii) যদি $y = e^{\cos^{-1} x}$, তেন্তে লিবনিটজৰ উপপাদ্য প্রয়োগ কৰি দেখুওৱা যে

If $y = e^{\cos^{-1} x}$, then using Leibnitz's theorem show that

$$(1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)\, x y_{n+1} - (n^2+1)\, y_n = 0$$

(iii) ধৰা হ'ল $y = mx + c$ এটা বক্রৰ অসীম শাখাৰ সাপেক্ষে এটা অনন্তস্পর্শী ৰেখা। তেন্তে দেখুওৱা যে $\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = m$, য'ত বিন্দু (x, y) বক্রটোৰ অসীম শাখাত অৱস্থিত এটা বিন্দু।

Let $y = mx + c$ be an asymptote corresponding to an infinite branch of a curve. Then show that $\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = m$, where (x, y) is a point on the infinite branch of the curve.

★★★