2 0 2 4

(December)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC1

(Calculus and Classical Algebra)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* দেখুওৱা যে (Show that)

$$\frac{(1+i)^6(1-i\sqrt{3})^4}{(1-i)^8(1+i\sqrt{3})^5}=\frac{i}{4}$$ 4

অথবা / *Or*

যদি (If)

$$x_r=\cos\frac{\pi}{3^r}+i\sin\frac{\pi}{3^r};\quad r\geq 0$$

তেন্তে দেখুওৱা যে (then show that)

(i) $x_1 x_2 x_3 \ldots = i$

(ii) $x_0 x_1 x_2 \ldots = -i$

(b) যদি (If)

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta;\ y + \frac{1}{y} = 2\cos\phi$$

তেন্তে দেখুওৱা যে, $x^m y^n + \dfrac{1}{x^m y^n}$ৰ কোনো এটা মান $2\cos(m\theta + n\phi)$. 4

then show that one of the values of $x^m y^n + \dfrac{1}{x^m y^n}$ is $2\cos(m\theta + n\phi)$.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে 1 অৰ n তম মূলবোৰে এটা গুণোত্তৰ প্ৰগতি গঠন কৰে।

Show that nth roots of unity form a geometric progression.

(c) দেখুওৱা যে (Show that)

$$\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$$ 4

অথবা / Or

ডি ম'ইভাৰৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা :

Solve using De Moivre's theorem :

$$x^8 + x^5 - x^3 - 1 = 0$$

2. (a) লিব্‌নিজৰ সূত্ৰটো মূলতে কি কাৰণে ব্যৱহাৰ কৰা হয়, লিখা। 1

Write the basic application of Leibnitz theorem.

(b) যদি (If)

$$f'(x) = (x-a)^{2n}(x-b)^{2m+1};\ m, n \in \mathbb{N}$$

তেন্তে প্ৰথম অৱকলজ পৰীক্ষাৰ দ্বাৰা দেখুওৱা যে

then show using first derivative test that

(i) $x = b$ এটা সৰ্বনিম্ন হয়; (is a minimum;)

(ii) $x = a$ সৰ্বোচ্চ/সৰ্বনিম্ন নহয়। (is neither a maximum nor a minimum.) 3

(c) যদি (If)

$$y^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{y^{\frac{1}{m}}} = 2x$$

তেন্তে দেখুওৱা যে (the show that)

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$ 4

(d) ল'পিটেলৰ নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি তলৰ যি কোনো এটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা : 4

Using L'Hospital's rule, answer any *one* question of the following :

(i) মান নিৰ্ণয় কৰা (Evaluate) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\log(1+x)}{x \sin x}$$

Scanned with OKEN Scanner

(ii) যদি (If)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3} = 1$$

তেন্তে a আৰু bৰ মান উলিওৱা।

then find the values of a and b.

3. (a) যদি (If)

$$J_{m,\,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx;$$

$$m, n \in \mathbf{N}, \quad m, n > 1$$

তেন্তে দেখুওৱা যে (then show that)

$$J_{m,\,n} = \frac{n-1}{m+n} J_{m,\,n-2} = \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,\,n}$$ 4

(b) $r = a(1 + \cos\theta)$ বক্ৰডালৰ সম্পূৰ্ণ দীঘ উলিওৱা আৰু দেখুওৱা যে ওপৰৰ অৰ্ধচাপটো $\theta = \frac{\pi}{3}$ ত দ্বিখণ্ডিত হৈছে। 4

Find the perimeter of the curve $r = a(1 + \cos\theta)$ and show that the upper half is bisected at $\theta = \frac{\pi}{3}$.

অথবা / Or

$x = 1$ৰ পৰা $x = 2$ লৈ, তলৰ বক্ৰডালৰ সম্পূৰ্ণ দীঘ উলিওৱা :

Find the length of the following curve from $x = 1$ to $x = 2$:

$$y = \log \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

(Continued)

(c) তলৰ বক্ৰডালৰ প্ৰাথমিক অক্ষ সাপেক্ষে হোৱা আৱৰ্তনৰ ফলত উৎপত্তি হোৱা গোটা বস্তুটোৰ আয়তন আৰু পৃষ্ঠভাগৰ কালি উলিওৱা : 4

Find the volume and surface area of the solid generated by revolving the following curve about the initial line :

$$r = a(1 - \cos\theta)$$

4. (a) খালী ঠাই পূৰণ কৰা : 1

যদি f আৰু g দুটা ফলন হয়, তেন্তে $g \circ f$ সংজ্ঞাবদ্ধ হ'ব যদিহে _____ ।

Fill in the blank :

If f and g be any two mappings, then $g \circ f$ will be defined only when _____.

(b) দেখুওৱা যে যদি $f : X \to Y$ এটা এক-ঐকিকী ফলন হয়, তেন্তে এটা ফলন $g : Y \to X$ থাকিব যাতে $g \circ f$ আৰু $f \circ g$ যথাক্ৰমে X আৰু Yত আইডেন্টিটি ফলন হ'ব। 3

Show that if $f : X \to Y$ is a bijection, then there exists a mapping $g : Y \to X$ such that both $g \circ f$ and $f \circ g$ are identity mappings on X and Y respectively.

(c) দেখুওৱা যে যদি a এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে

Show that if a is an odd integer, then

$$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}; \quad n \geq 1$$ 4

(Turn Over)

Scanned with OKEN Scanner

(d) তলৰ বিবৃতি দুটা সাব্যস্ত কৰা : 2+2

Establish the following two statements :

(i) g.c.d. $(a, b) = d \Rightarrow$ g.c.d. $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

(ii) যদি $a \mid bc$ আৰু g.c.d. $(a, b) = 1$, তেন্তে $a \mid c$.

If $a \mid bc$ and g.c.d. $(a, b) = 1$, then $a \mid c$.

5. (a) কেতিয়া দুটা ৰৈখিক সমীকৰণ প্ৰণালী সমতুল্য হ'ব, লিখা। 1

Write when two linear systems of equations are equivalent.

(b) সত্য নে অসত্য লিখা : 1

Write whether True or False :

এটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ ভেক্টৰৰ সংহতিত শূন্য ভেক্টৰ থাকিব নোৱাৰে।

A linearly independent set of vectors never contains the zero vector.

(c) দেখুওৱা যে ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ ভেক্টৰৰ সংহতিৰ অৰিক্ত উপসংহতি ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হ'ব। 2

Show that a non-empty subset of a linearly independent set is linearly independent.

(d) যদি a, b, c ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ ভেক্টৰ, তেন্তে দেখুওৱা যে $a+b, b+c, c+a$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হ'ব। 3

If the vectors a, b, c are linearly independent, then show that $a+b, b+c, c+a$ are linearly independent.

(e) তলৰ ভেক্টৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 5

Solve the following vector equation :

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0$$

য'ত (where)

$$v_1 = (1, 1, 2, 4), \quad v_2 = (2, -1, -5, 2)$$

$$v_3 = (1, -1, -4, 0), \quad v_4 = (2, 1, 1, 6)$$

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

6. (a) দেখুওৱা যে যদি α আৰু β, $x^2 - 2x + 4 = 0$ ৰ দুটা মূল হয়, তেন্তে

$$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$$ 4

Show that if α and β are the roots of $x^2 - 2x + 4 = 0$, then

$$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$$

(b) ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন থাকিবৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় চৰ্তটো লিখি প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove the necessary condition for existence of extremum of a function.

Scanned with OKEN Scanner

(c) তলৰ বক্ৰডালৰ প্ৰাথমিক অক্ষ সাপেক্ষে হোৱা আৱৰ্তনৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা গোটা বস্তুটোৰ পৃষ্ঠভাগৰ কালি উলিওৱা : 4

Find the surface area of the solid generated by revolving the following curve about the initial line :

$$r = 2a\cos\theta$$

(d) যদি (If) g.c.d. $(a, b) = 1$, তেন্তে দেখুওৱা যে (then show that)

$$\text{g.c.d}\ (a^n, b^n) = 1; \quad n \geq 1$$ 4

(e) দেখুওৱা যে তলৰ ভেক্টৰকেইটা বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ : 4

Show that the following vectors are linearly independent :

$$(1, 1, 0, 0); \quad (0, 1, -1, 0); \quad (0, 0, 0, 3)$$

★★★

Scanned with OKEN Scanner