1 SEM FYUGP MINMTH1

2023

(December)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH1

(Differential Calculus)

Full Marks : 80

Pass Marks : 24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* ε-δ ব্যৱহাৰ কৰি ফলনৰ সীমাৰ সংজ্ঞা লিখা। 1

Using ε-δ, write the definition of limit.

(b) বিচ্ছিন্নতাৰ প্ৰকাৰ লিখা, যদি

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x)$$ 1

Write the type of discontinuity, if

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x)$$

(Turn Over)

(c) যদি $f(x) = 2x$, $L = 8$, $a = 4$, $\varepsilon = 0{\cdot}1$, তেন্তে δৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

হয়। 3

If $f(x) = 2x$, $L = 8$, $a = 4$, $\varepsilon = 0{\cdot}1$, then find δ such that

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(d) মান নিৰ্ণয় কৰা : 3

Evaluate :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 5}$$

(e) দেখুওৱা যে $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ সকলোতে অনবিচ্ছিন্ন। 4

Show that $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ is continuous everywhere.

অথবা / Or

যদি এটা ফলন f তলত দিয়া দৰে সংজ্ঞাবদ্ধ হয়

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 4\ , & \text{যেতিয়া} \quad 0 < x \le 1 \\ 4x^2 - 3x\ , & \text{যেতিয়া} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে $x = 1$ বিন্দুত f ফলনটো অনবিচ্ছিন্ন।

If a function f is defined as

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 4\ , & \text{if} \quad 0 < x \le 1 \\ 4x^2 - 3x\ , & \text{if} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

then show that f is continuous at $x = 1$.

(f) প্ৰমাণ কৰা যে যদি $x = c$ বিন্দুত f ফলনটো অৱকলনীয় হয়, তেন্তে $x = c$ বিন্দুত অনবিচ্ছিন্ন হ'ব। 3

Prove that if a function f is differentiable at $x = c$, then f is continuous at $x = c$.

অথবা / Or

যদি $y = x^{2n}$, য'ত n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$y_n = 2^n \{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\}\, x^n$$

If $y = x^{2n}$, where n is a positive integer, then show that

$$y_n = 2^n \{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\}\, x^n$$

2. (a) যদি $y = \sin 3x$, তেন্তে y_n নিৰ্ণয় কৰা। 1

If $y = \sin 3x$, then find y_n.

(b) দুটা চলকৰ সমমাত্ৰাৰ ফলনৰ বাবে অয়লাৰৰ উপপাদ্য লিখা। 1

State Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

(c) যদি $y = \log(ax + b)$, তেন্তে y_n নিৰ্ণয় কৰা। 2

If $y = \log(ax + b)$, then find y_n.

(d) লিবনিজৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Leibnitz's theorem.

অথবা / Or

যদি $y = e^{a \sin^{-1} x}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$

If $y = e^{a \sin^{-1} x}$, then show that

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$

(e) যদি $f(x, y) = x\cos y + ye^x$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$ 2

If $f(x, y) = x\cos y + ye^x$, then show that

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

(f) যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$ 4

If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then show that

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$

অথবা / Or

যদি $u = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

If $u = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$, then show that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

3. (a) $y = f(x)$ বক্ৰৰ (x_1, y_1) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ লিখা। 1

Write the equation of tangent to the curve $y = f(x)$ at the point (x_1, y_1).

(b) $xy = 4$ সমীকৰণটো ধ্ৰুৱীয় স্থানাংকত প্ৰকাশ কৰা। 1

Express the equation $xy = 4$ in polar coordinate.

(c) $y = x^3 - 2x^2 - x + 5$ বক্ৰৰ $(0, 5)$ বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ উলিওৱা। 3

Find the equation of the tangent to the curve $y = x^3 - 2x^2 - x + 5$ at $(0, 5)$.

অথবা / Or

$x^2 + xy - y^2 = 1$ বক্ৰৰ $(2, 3)$ বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

Find the equation of the normal to the curve $x^2 + xy - y^2 = 1$ at $(2, 3)$.

(d) $x^4+y^4=2$ বক্ৰৰ (1, 1) বিন্দুত বক্ৰতাৰ ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা। 5

Find the radius of curvature of the curve $x^4+y^4=2$ at the point (1, 1).

অথবা / Or

$r=a(1-\cos\theta)$ কাৰডিয়ইডৰ যি কোনো বিন্দু (r, θ)ত বক্ৰতাৰ ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

Find the radius of curvature at any point (r, θ) of the cardioid $r=a(1-\cos\theta)$.

4. (a) বিভক্তি বিন্দুৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define inflection point.

(b) উপবৃত্তৰ প্ৰাচলিক সমীকৰণ লিখা। 1

Write the parametric equation of ellipse.

(c) $x=2t-3$ আৰু $y=6t-7$ প্ৰাচলিক সমীকৰণৰ চিত্ৰ অংকন কৰা। 4

Draw the graph of parametric equations $x=2t-3$ and $y=6t-7$.

অথবা / Or

$x^2+(y-3)^2=9$ সমীকৰণটো ধ্ৰুৱীয় আকাৰত প্ৰকাশ কৰি চিত্ৰ অংকন কৰা।

Express the equation $x^2+(y-3)^2=9$ in polar coordinates and sketch the graph.

(d) $y=x^4-4x^3+10$ৰ চিত্ৰ অংকন কৰা আৰু বিভক্তি বিন্দু আছে যদি, চিনাক্ত কৰা। 5

Draw the graph of $y=x^4-4x^3+10$ and identify the inflection point, if any.

অথবা / Or

তলত দিয়া বক্ৰৰ অনন্তস্পৰ্শী নিৰ্ণয় কৰা :

Find the asymptotes of the following curve :

$$x^3+2x^2y-xy^2-2y^3+xy-y^2-1=0$$

(e) $r=1+\cos\theta$ বক্ৰৰ চিত্ৰ অংকন কৰা। 4

Trace the curve $r=1+\cos\theta$.

5. (a) ৰোলৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Rolle's theorem.

(b) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x$ ফলনৰ $[-3, 3]$ অন্তৰালত ৰোলৰ উপপাদ্যটো সত্যাপন কৰা। 3

Verify Rolle's theorem for the function $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x$ in the interval $[-3, 3]$.

(c) লেগ্ৰেঞ্জৰ মধ্যমানৰ উপপাদ্যটো লিখা। 2

Write the Lagrange's mean value theorem.

6. (a) ক'চিৰ অৱশিষ্ট আকাৰৰ সৈতে টেইলৰৰ উপপাদ্যটো লিখা। 2

State Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder.

(b) $\log(1+x)$ৰ প্ৰসাৰণত, n টা পদৰ পিছত ক'চিৰ অৱশিষ্ট নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the Cauchy's remainder after n terms in the expansion of $\log(1+x)$.

(c) মেকলৰিনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $\cos x$ক x সূচকত অসীম শ্ৰেণীত বিস্তৃতি কৰা। 5

Using Maclaurin's theorem, expand $\cos x$ in an infinite series in powers of x.

অথবা / Or

$f(x) = 5x^6 + 18x^5 + 15x^4 - 10$ ফলনৰ চৰম মান নিৰ্ণয় কৰা।

Evaluate extreme value of the function $f(x) = 5x^6 + 18x^5 + 15x^4 - 10$.

(d) মান নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো দুটা) : 3×2=6

Evaluate (any *two*) :

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(ii) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$

(iii) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

(iv) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^4}{e^x}$

★★★